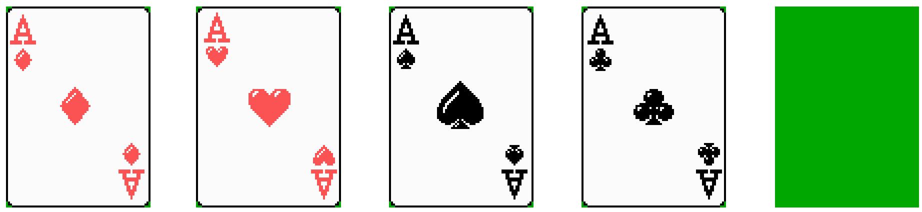
Runda czwarta – Do czego można użyć funkcji

Rachunek prawdopodobieństwa

Powiedzmy, że z talii 24 kart losujemy 5 i zastanawiamy się, jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania karety asów:



W talii 24 kart znajdują się 4 asy i 20 nie-asów... My losujemy 5 kart, gdzie spodziewamy się otrzymać 4 asy i 1 nie-as. Wszystkich możliwości wylosowania 5 kart z 24 jest tyle, ile podzbiorów pięcioelementowych ze zbioru 24 elementów, czyli tyle, ile jest kombinacji 5-elementowych zbioru 24 elementów.

$$\binom{24}{5} = \frac{24!}{5! \cdot (24-5)!} = \frac{19! \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 19!} = \frac{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 4 \cdot 25}{1} = 1062600$$

$$\binom{4}{4} = \frac{4!}{4! \cdot (4-4)!} = \frac{1}{1!} = 1$$

A na ile sposobów można wylosować 4 asy z ogólnej ich liczby 4 – jest to ilość kombinacji 4-elementowych zbioru 4 elementów, czyli znowu kombinacje...

Do tego, na ile sposobów można wylosować 1 nie-asa ze zbioru 20 nie asów – też kombinacje...

$$\binom{20}{1} = \frac{20!}{1! \cdot (20-1)!} = \frac{19! \cdot 20}{1 \cdot 19!} = 20$$

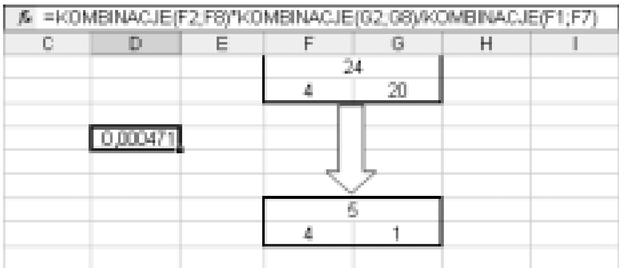
Prawdopodobieństwo zajścia takiego zdarzenia będzie jak 1 razy 20, podzielone przez 1062600... bardzo mało! A ile? Możemy do obliczeń zaprząc Excela.

Utwórzmy arkusz, który nazwiemy **Rachunek prawdopodobieństwa**:

komórka	wpis:	komórka	wpis:	komórka	wpis:
		f1	**24**		
		f2	**4**	**g2**	**=f1-f2**
d4	**=kombinacje(f2;f8)*kombinacje(g2;g8)/kombinacje(f1;f7)**				
		f7	**5**		
		f8	**4**	**g8**	**=f7-f8**

No i mamy wynik!

Tą ładną strzałkę możemy narysować korzystając z możliwości oferowanych przez pasek **Rysowanie**. Klikamy w tym celu przycisk  – u dołu ekranu pojawi się dodatkowy zestaw przycisków.

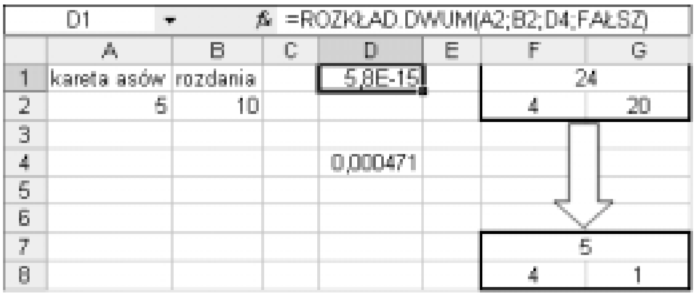


Następnie klikamy na przycisku **Autokształty**, a w rozwijającym się menu najeżdżamy na pozycję **Strzałki blokowe** i tam już odnajdujemy to, co trzeba...

Wróćmy do naszego karcianego przykładu. Zastanówmy się, jakie jest prawdopodobieństwo, że w 10 rozdaniach 5 razy otrzymamy karetę asów? Najprościej posłużyć się tu próbami Bernoulli'ego, czyli rozkładem dwumianowym. Jeżeli potraktujemy zdarzenie polegające na wylosowaniu karety asów jako sukces, to już wiemy, jakie jest prawdopodobieństwo takiego sukcesu – jest ono obliczone w komórce **d4**... Uzupełnijmy nasz arkusz:

komórka	wpis:	komórka	wpis:	komórka	wpis:
a1	**kareta asów**	**b1**	**rozdania**	**d1**	**=rozkład.dwum(a2;b2;d4;falsz)**
a2	**5**	**b2**	**10**		

A otrzymany wynik - rzędu 10^{-15} sugeruje, że raczej nie da się tego uzyskać „bez kantów”



Zapiszmy nasze odkrycie na dysku ( ).

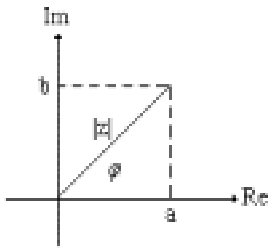
ĆWICZENIA - TRENING CZYNI MISTRZA...

1	Korzystając z funkcji rozkładu dwumianowego, oblicz prawdopodobieństwo otrzymania pięciokrotnie szóstki w 7 rzutach kostką do gry (prawdopodobieństwo sukcesu wynosi oczywiście 1/6, o ile rzucamy „uczciwą” kostką...).

Liczby zespolone

Jak można się domyślić, z przedstawionego zestawienia funkcji - Excel potrafi sobie doskonale radzić nie tylko w dziedzinie liczb rzeczywistych, ale i w liczbach zespolonych. Otwórzmy nowy arkusz i nazwijmy go **Liczby zespolone**. Zrobimy sobie prostą wprawkę:

komórka	wpis:	komórka	wpis:	komórka	wpis:	komórka	wpis:
a1	**a=**	**b1**	**3**	**c1**	**b=**	**d1**	**4**
a2	**z=**	**b2**	**=complex(b1;d1)**	**c2**	**z’=**	**d2**	**=imconjugate(b2)**
a3	**Re(z)=**	**b3**	**=imreal(b2)**	**c3**	**Im(z)**	**d3**	**=imaginary(b2)**
a4	**|z|=**	**b4**	**=imabs(b2)**	**c4**	**kąt=**	**d4**	**=stopnie(imargument(b2))**
a5	**z*z’=**	**b5**	**=improduct(b2;d2)**	**c5**	**z+z’=**	**d5**	**=imsum(b2;d2)**
a6	**z/z’=**	**b6**	**=imdiv(b2;d2)**	**c6**	**z-z’=**	**d6**	**=imsub(b2;d2)**



1) $z = a + b\,i \qquad i = \sqrt{-1}$

2) $z = |z|\,e^{i\varphi} = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Przypomnijmy, że liczbę zespoloną możemy sobie wyobrazić, jako wektor na płaszczyźnie, w układzie współrzędnych prostokątnych, gdzie oś X – to oś rzeczywista, a oś Y – to oś urojona. Liczbę zespoloną można przy takiej ilustracji opisać na dwa standardowe sposoby:

1. jako parę współrzędnych (a,b) lub
2. jako parę – długość wektora i kąt, jaki tworzy on z jedną z osi.

A wynik naszych wysiłków możemy teraz spokojnie zapisać na dysku, pamiętając, że to tylko podstawowe działania na liczbach zespolonych...

	A	B	C	D
1	a=	3	b=	4
2	z=	3+4i	z'=	3-4i
3	Re(z)=	3	Im(z)=	4
4	|z|=	5	kąt=	53,1301
5	z*z'=	25	z+z'=	6
6	z/z'=	-0,28+0,96i	z-z'=	8i

ĆWICZENIA – TRENING CZYNI MISTRZA...

1	Sprawdź działanie pozostałych „IMfunkcji” na naszej liczbie „**z**” z komórki **b2**.

Macierze

Zaktualizujmy nasz plik na dysku ( ) i przejdźmy na nowy arkusz, który nazwiemy sobie **Macierze**. Zbadamy możliwości Excela w działaniach na macierzach, czyli tablicach liczb. Zaczniemy od macierzy kwadratowej – to taka tablica liczb, gdzie ilość wierszy z liczbami jest równa ilości kolumn z liczbami. Ot, na przykład wpiszmy coś takiego:

komórka	wpis:	komórka	wpis:	komórka	wpis:
a1	**macierz_A**				
a2	**1**	**b2**	**2**	**c2**	**3**
a3	**0**	**b3**	**1**	**c3**	**6**
a4	**1**	**b4**	**2**	**c4**	**1**

... w ten sposób uzyskamy:

$$\{macierz\_A\} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dla macierzy kwadratowych istnieje w algebrze pewna funkcja nazywana wyznacznikiem. Wyznacznik macierzy kwadratowej o wymiarach: n-wierszy na n-kolumn oblicza się według tzw. rozwinięcia Laplace'a z następującego wzoru:

$$\det(A) = (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det(A_{i1}) + \ldots + (-1)^{i+n} \cdot a_{in} \cdot \det(A_{in})$$

gdzie:

i – oznacza dowolny wiersz macierzy, według którego mamy dokonać rozwinięcia (równie dobrze rozwinięcia można dokonywać według dowolnej z kolumn), natomiast:

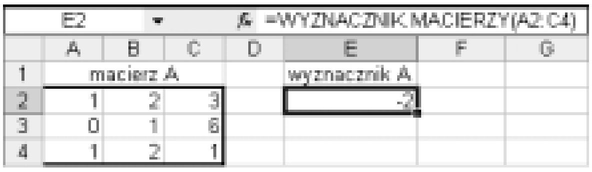
A_{ik} – oznacza macierz powstałą z macierzy **A** poprzez „wycięcie" i-tego wiersza i k-tej kolumny.

Całość nie brzmi zbyt zachęcająco. Czy to znaczy, że teraz mamy sobie przypominać elementy algebry liniowej? Na szczęście nie, bo istnieje w Excelu specjalna funkcja do obliczania wyznacznika macierzy:

WYZNACZNIK.MACIERZY(*macierz***)**
(w wersji anglojęzycznej: **MDETERM**)

Wstawmy do komórki **e2** formułę: **=wyznacznik.macierzy(a2:c4)** (oczywiście, mogliśmy nasz zakres komórek opatrzyć jakąś nazwą – np.: **macierz_A** i teraz wpisalibyśmy formułę: **=wyznacznik.macierzy(macierz_A)**).

Oto rezultat:


E2 =WYZNACZNIK.MACIERZY(A2:C4)

	A	B	C	D	E	F	G
1	macierz A				wyznacznik A		
2	1	2	3		-2		
3	0	1	6				
4	1	2	1				

Niedowiarkom proponuję policzenie wyznacznika naszej macierzy „na piechotę"!

Dla macierzy kwadratowych o niezerowym wyznaczniku można obliczyć tzw. macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-1}$...

Ogólny wzór jest następujący:

$$\{macierz\_A^{-1}\} = \frac{1}{\det(macierz\_A)} \cdot \{macierz\_A^{D}\}$$

Gdzie znowu tzw. macierz dopełnień A^D obliczana jest według następującego wzoru:

$$a_{ij}^D = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$$

Tutaj A_{ij} jest macierzą powstałą z macierzy **A** poprzez „wycięcie” i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Na szczęście – znowu Excel przychodzi nam z pomocą w rachunkach – dostępna jest gotowa funkcja:

> **MACIERZ.ODW(***macierz***)**
> *(w* wersji *anglojęzycznej:* ***MINVERSE****)*

Powiedzmy, że chcemy obliczyć macierz odwrotną do naszej macierzy **A** (znajdującej się w komórkach **a2:c4**), a wynik – macierz $\mathbf{A}^{-1}$ – chcemy uzyskać w komórkach **a7:a9**.

Powstaje jednak problem natury technicznej: jak poradzić sobie, gdy wynikiem działania funkcji nie jest pojedyncza liczba tylko tablica liczb? (Przecież macierz odwrotna do **A** jest też macieżą i ma taki sam wymiar jak macierz **A**!) Dotychczas stosowany sposób akceptowania komórki za pomocą np. klawisza Enter tym razem się nie sprawdzi, bo w wyniku uzyskujemy tylko jedną liczbę – tą w akceptowanej komórce. (Możemy łatwo sprawdzić, że jeżeli w komórce **a7** wpiszemy wyrażenie: **=macierz.odw(a2:c4)** i zaakceptujemy wpis klawiszem Enter, to w wyniku uzyskamy niestety tylko jedną liczbę – w rzeczywistości będzie to element a_{11} naszej macierzy odwrotnej.) Co więc mamy robić? Jak uzyskać pozostałe elementy wynikowej macierzy odwrotnej?

Możemy posłużyć się jeszcze jedną dostępną w Excelu funkcją, która „wybiera” dowolne elementy tablicy liczb:

> **INDEKS(***macierz;* **numer***_wiersza; numer_kolumny***)**
> *(w wersji anglojęzycznej:* ***INDEX****)*

Wpiszmy do komórek następujące wartości:

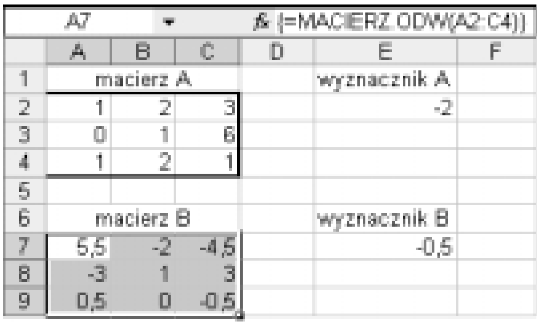
komórka	wpis:	komórka	wpis:	komórka	wpis:
a7	**=indeks(macierz.odw (a2:c4);1;1)**	**b7**	**=indeks(macierz.odw (a2:c4);1;2)**	**c7**	**=indeks(macierz.odw (a2:c4);1;3)**
a8	**=indeks(macierz.odw (a2:c4);2;1)**	**b8**	**=indeks(macierz.odw (a2:c4);2;2)**	**c8**	**=indeks(macierz.odw (a2:c4);2;3)**

a9	**=indeks(macierz.odw (a2:c4);3;1)**	**b9**	**=indeks(macierz.odw (a2:c4);3;2)**	**c9**	**=indeks(macierz.odw (a2:c4);3;3)**

Rzeczywiście uzyskamy teraz poprawną tablicę 9 liczb macierzy $\mathbf{A}^{-1}$. Istnieje jednak prostszy sposób uzyskania tego samego rezultatu, czyli prostszy sposób uzyskania wyniku w bloku komórek zamiast w pojedynczej komórce:

- zaznaczmy zakres komórek docelowych: **a7:c9** i wyczyśćmy je z poprzedniej zawartości (wystarczy nacisnąć klawisz DEL [Del]),
- teraz napiszmy formułę: **=macierz.odw(a2:c4)**, ale **<u>nie akceptujmy</u>** tego klawiszem [Enter] !,
- tylko naciśnijmy kombinację klawiszy [Ctrl][Shift][Enter].

Widać, że uzyskaliśmy ten sam wynik, co przed chwilą i to „bez łaski” funkcji INDEKS.



	A	B	C	D	E	F
A7	{=MACIERZ.ODW(A2:C4)}					
1	macierz A				wyznacznik A	
2	1	2	3		-2	
3	0	1	6			
4	1	2	1			
5						
6	macierz B				wyznacznik B	
7	5,5	-2	-4,5		-0,5	
8	-3	1	3			
9	0,5	0	-0,5			

Zwróćmy uwagę na linię formuły – w każdej z komórek docelowego zakresu (**a7:c9**) została wpisana ta sama wartość: **{=MACIERZ.ODW(A2:C4)}**. Nawiasy klamrowe informują nas, że wpisana formuła obowiązuje nie dla jednej komórki, ale dla całego bloku komórek – dla całej macierzy.

Nazwijmy naszą macierz odwrotną – **macierz_B** i policzmy dla niej wyznacznik w komórce **e7** – przecież już wiemy jak to zrobić...

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Sprawdźmy, że otrzymany wynik jest odwrotnością wyznacznika otrzymanego dla macierzy A! I bardzo dobrze, bo obowiązuje tutaj pewna prosta reguła.

Poza tym, iloczyn macierzy A i macierzy do niej odwrotnej A^{-1} powinien w wyniku dawać tzw. macierz jednostkową, która ma na przekątnej same jedynki, a poza przekątną – same zera. Taka macierz jednostkowa (niezależnie od swojego wymiaru) ma zawsze wyznacznik równy 1.

$$\{macierz\_A\} \cdot \{macierz\_A^{-1}\} = \{macierz\_jednostkowa\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

No dobrze, ale jak policzyć ten iloczyn macierzy, aby się o tym przekonać...?

Mnożenie macierzy **A** i **B**: $\{macierz\_C\} = \{macierz\_A\} \cdot \{macierz\_B\}$

$c_{ik} == \sum_{j} a_{ij} \cdot b_{jk}$ ... a tak obliczany jest element $\mathbf{c_{ij}}$ wynikowej macierzy **C**.

W Excelu istnieje specjalna funkcja do mnożenia macierzy, czyli znowu nie musimy tego robić na piechotę:

MACIERZ.ILOCZYN(*macierz_1; macierz_2***)**
*(w wersji anglojęzycznej: **MMULT**)*

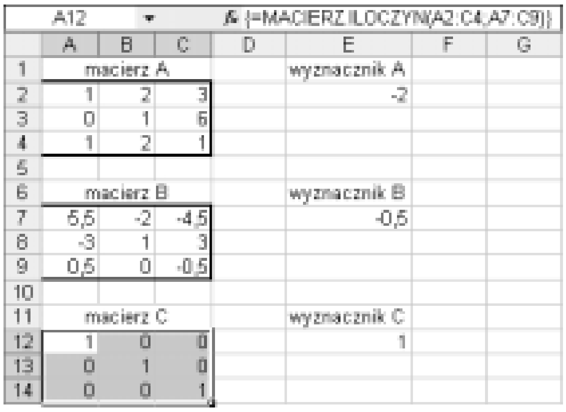
Przy czym ilość kolumn pierwszej mnożonej macierzy musi być równa ilości wierszy drugiej mnożonej macierzy.

Mnożenie macierzy jest zazwyczaj nieprzemienne, tzn: $\{A\} \cdot \{B\} \neq \{B\} \cdot \{A\}$

Pomnóżmy naszą macierz **A**: komórki **a2:c4**, przez macierz **B**: komórki **a7:c9**, tak aby wynikową tabelę – macierz **C** – uzyskać w komórkach: **a12:a14**. W tym celu:

- zaznaczmy docelowy blok komórek: **a12:c14**,
- następnie wpiszmy formułę: **=macierz.iloczyn(a2:c4; a7:c9)**, no i wreszcie bez akceptowania naszego wpisu:
- wciśnijmy kombinację klawiszy Ctrl Shift Enter.

Otrzymamy w rezultacie coś takiego:



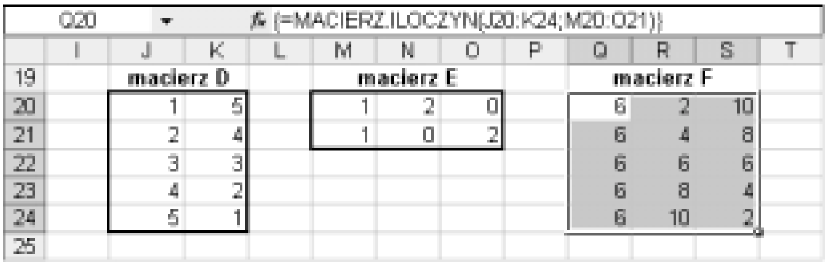
A12 | {=MACIERZ.ILOCZYN(A2:C4;A7:C9)}

	A	B	C	D	E	F	G
1	macierz A				wyznacznik A		
2	1	2	3		-2		
3	0	1	6				
4	1	2	1				
5							
6	macierz B				wyznacznik B		
7	5,5	-2	-4,5		-0,5		
8	-3	1	3				
9	0,5	0	-0,5				
10							
11	macierz C				wyznacznik C		
12	1	0	0		1		
13	0	1	0				
14	0	0	1				

(Oczywiście, jeżeli mamy ochotę, możemy podobny efekt uzyskać przy mniej karkołomnych sztuczkach na klawiaturze, ale za to z użyciem funkcji INDEKS.)

Rzecz jasna, funkcja mnożenia macierzy nie wymaga, aby składowe macierze były kwadratowe. Istotne jest jednak, aby ilość kolumn pierwszej mnożonej macierzy była równa ilości wierszy drugiej mnożonej macierzy. Poza tym, przewidując rozmiar macierzy wynikowej, pamiętajmy, że będzie ona miała tyle wierszy – co macierz pierwsza – i tyle kolumn – co macierz druga.

Oto przykład mnożenia macierzy **D** (5 wierszy x 2 kolumny) przez macierz **E** (2 wiersze x 3 kolumny). W wyniku uzyskaliśmy macierz **F** (5 wierszy x 3 kolumny).


Q20 fx {=MACIERZ.ILOCZYN(J20:K24;M20:O21)}

	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
19		macierz D			macierz E				macierz F			
20		1	5		1	2	0		6	2	10	
21		2	4		1	0	2		6	4	8	
22		3	3						6	6	6	
23		4	2						6	8	4	
24		5	1						6	10	2	
25												

Czytelnik zechce samodzielnie sprawdzić, czy autor nie oszukuje.

Jeszcze jedna przydatna przy zabawie z macierzami funkcja, pozwalająca na zamianę miejscami wierszy i kolumn – czyli transponowanie:

> **TRANSPONUJ(***macierz***)**
> *(w wersji anglojęzycznej:* ***TRANSPOSE****)*

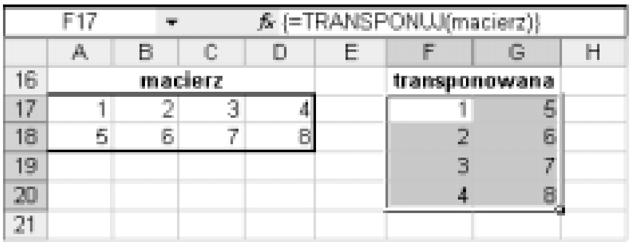
Ilość kolumn macierzy po transpozycji jest równa ilości jej wierszy przed transpozycją, to samo dotyczy wierszy.

Zróbmy prosty przykład i wpiszmy następujące dane:

komórka	wpis:	komórka	wpis:	komórka	wpis:	komórka	wpis:
a17	**1**	**b17**	**2**	**c17**	**3**	**d17**	**4**
a18	**5**	**b18**	**6**	**c18**	**7**	**d18**	**8**

- zaznaczmy teraz blok komórek **a17:d18**,
- nadajmy mu nazwę: **macierz**,
- zaznaczmy docelowy blok komórek **f17:g20**,
- wpiszmy formułę: **=transponuj(macierz)**, po czym:
- wciśnijmy kombinację klawiszy Ctrl Shift Enter.

Otrzymamy wówczas następujący wynik:



Cramer

Przejdźmy teraz na nowy arkusz, nazwijmy go **Cramer** i sprawdźmy w praktyce, do czego może się przydać znajomość macierzy i działań na macierzach.

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 = b_2 \\ a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\{A\}\cdot\{x\} = \{B\} \qquad /\cdot\{A^{-1}\}\ \textit{lewostronnie}$$

$$\{A^{-1}\}\cdot\{A\}\cdot\{x\} = \{A^{-1}\}\cdot\{B\}$$

$$\{I\}\cdot\{x\} = \{A^{-1}\}\cdot\{B\}$$

$$\{x\} = \{A^{-1}\}\cdot\{B\}$$

Spróbujmy teraz rozwiązać przykład, podany jako ćwiczenie kilka stron wcześniej. Rozwiązywanie układu równań liniowych metodą Cramera.

Żeby było trochę trudniej, niech to będzie układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi x_1, x_2 i x_3. Problem możemy doprowadzić do postaci macierzowej.

(Mnożenie macierzy jest nieprzemienne!)

Przypomnijmy, że macierz pomnożona przez macierz do niej odwrotną daje w wyniku macierz jednostkową. Macierz jednostkowa zachowuje się z kolei w mnożeniu macierzy, jak zwykła jedynka, czyli można ją opuścić.

No to do dzieła. Wpiszmy do kolejnych komórek arkusza następujące dane:

komórka	wpis:	komórka	wpis:	komórka	wpis:	komórka	wpis:
a1	**A**					**e1**	**B**
a2	**1**	**b2**	**2**	**c2**	**3**	**e2**	**1**